

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. Ломоносова

Физический факультет

кафедра общей физики и физики конденсированного состояния

Методическая разработка

по общему физическому практикуму

Лаб. работа № 18

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ
ТЕЛ**

Описание составил профессор Андреевко А.С.

Москва - 2012

Подготовил методическое пособие к изданию доц. Авксентьев Ю.И.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Целью работы является экспериментальное определение моментов инерции твердых тел; проверка теоретических формул расчета моментов инерции.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Как следует из определения, момент инерции твердого тела относительно данной оси является аддитивной величиной, т.е. моменты инерции тела относительно данной оси складываются из моментов инерции отдельных частей тела относительно той же оси. Можно достаточно просто рассчитать моменты инерции твердого тела, все элементы которого, удалены от оси на одинаковые расстояния (например, тонкое кольцо или тонкостенный цилиндр относительно оси симметрии). Для определения моментов инерции тел сложной формы обычно используют экспериментальные методы, одним из

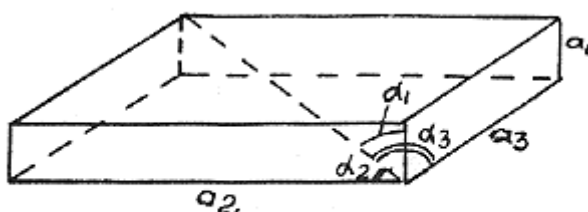


Рис.1

которых является *метод крутильных колебаний*.

Крутильным маятником называется твердое тело, подвешенное на упругой проволоке и совершающее крутильные колебания относительно положения равновесия. Если проволоку закрутить на малый угол и

отпустить, то возникают гармонические колебания относительно положения равновесия, которые можно описать следующим уравнением:

$$J\ddot{\alpha} = -D\alpha, \quad (1)$$

где J - момент инерции тела, D - модуль кручения проволоки и α - угол поворота относительно положения равновесия.

Решив данное уравнение по аналогии с решением уравнения для грузика, колеблющегося на пружине, определим период колебания T крутильного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{J/D}. \quad (2)$$

Экспериментально определив период колебаний и модуль кручения проволоки, по формуле (2) можно рассчитать момент инерции твердого тела любой формы относительно данной оси.

Согласно определению, момент инерции твердого тела зависит от положения оси вращения относительно тела. Как следует из теоретической механики, у каждого твердого тела существует три взаимно перпендикулярных оси, проходящих через его центр масс

(свободные оси), которые замечательны тем, что если вовлечь тело во вращение относительно любой из этих осей, то тело стремится сохранить ориентацию этой оси в пространстве. Моменты инерции относительно свободных осей J_1, J_2, J_3 называются *главными моментами инерции*. Зная главные моменты инерции, можно рассчитать момент инерции относительно любой оси, проходящей через центр масс по следующей формуле:

$$J_x = J_1 \cos^2 \alpha_1 + J_2 \cos^2 \alpha_2 + J_3 \cos^2 \alpha_3, \quad (3)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - углы, которые образует данная ось со свободными осями O_1, O_2 и O_3 соответственно. В частности, для прямоугольного параллелепипеда момент инерции относительно оси, через диагональ, будет равен

$$J_x = J_1 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} + J_2 \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} + J_3 \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}, \quad (4)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - длины ребер параллелепипеда, параллельные свободным осям O_1, O_2 и O_3 соответственно (рис.1).

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

На основании прибора (2) (рис.2) прикреплен миллисекундомер (1). В основании закреплена колонка (3), на которой при помощи прижимных винтов

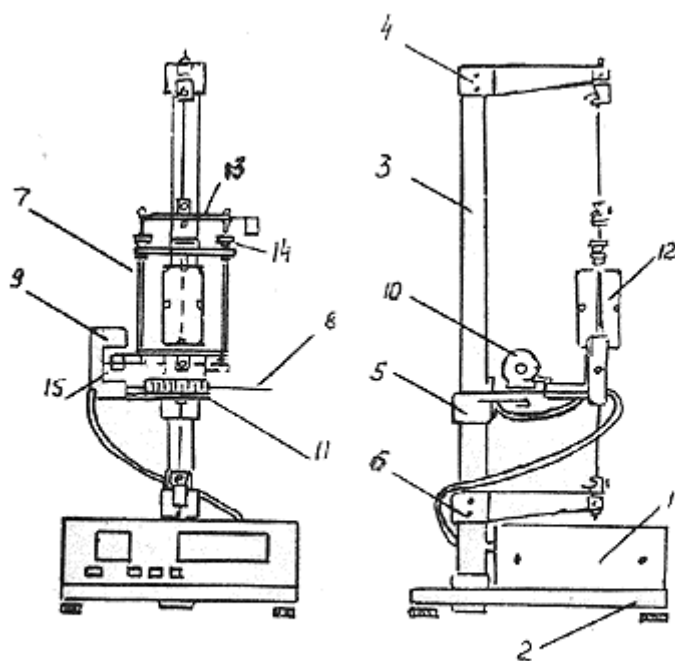


Рис.2

закреплены кронштейны (4, 5, 6). На кронштейне (5) находится пластина (8), которая служит основанием фотоэлектрическому датчику (9), электромагниту (10) и угловой шкале (11). Конструкция рамки (7) позволяет закреплять различные твердые тела (12), существенно отличающиеся друг от друга по форме и размерам. Твердые тела закрепляются при помощи подвижной балки (13), которая перемещается по направляющим между неподвижными балками. Балка устанавливается путем затягивания гаек (14) на

зажимных втулках, помещенных на подвижной балке.

В процессе колебаний маятника, флажок (15) рамки прерывает световой поток от лампочки, что приводит к регистрации количества периодов колебания фотоэлектрическим датчиком и общего времени, за которое происходит измерение.

На лицевой панели миллисекундомера размещены следующие элементы:

1. (*СЕТЬ*) - нажатие этой клавиши включает питающее напряжение (все индикаторы высвечивают цифру "0" и горит лампочка фотоэлектрического датчика).

2. (*СБРОС*) - нажатие клавиши вызывает сброс предыдущего показания, после чего прибор готов к проведению следующих измерений.

3. (*ПУСК*) - приводит к освобождению рамки от электромагнита и началу колебательного процесса. Одновременно включается секундомер.

4. (*СТОП*) - окончание измерения.

ИЗМЕРЕНИЕ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

1. Нажать клавишу *СЕТЬ*.
2. В рамке прибора закрепить исследуемый груз.
3. Поворачивая рамку прибора, приблизить ее флажок к электромагниту до прилипания.
4. Нажать кнопку *ПУСК*.
5. После подсчета счетчиком не менее 10 периодов крутильных колебаний, нажать кнопку *СТОП*.
6. По формуле $T = t / n$, где T - период крутильных колебаний, t - время колебаний и n - число колебаний, рассчитать период колебаний.
7. Повторить эти измерения и вычисления три раза.

Упражнение 1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННОГО МОМЕНТА УПРУГИХ СИЛ И МОМЕНТА ИНЕРЦИИ РАМКИ

Как видно из формулы (2), для определения момента инерции твердого тела необходимо знать модуль кручения проволоки, на которой подвешена рамка. Кроме того, необходимо учесть собственный момент инерции рамки, который может быть сравним по величине с моментом инерции исследуемого тела.

Для определения этих параметров крутильного маятника, воспользуемся тем, что можно легко рассчитать моменты инерции некоторых симметричных однородных тел относительно осей, проходящих через центр масс этих тел. Например, момент инерции цилиндра радиуса R и массой m относительно оси, совпадающей с осью аксиальной симметрии цилиндра, равен

$$J_{\text{ц}} = \frac{1}{2} m R^2. \quad (5)$$

Период колебания крутильного маятника в отсутствие тела, закрепленного в рамке, согласно (2), будет

$$T_1 = 2\pi \sqrt{J_P / D}, \quad (6)$$

где J_P - момент инерции рамки.

Период колебания маятника с закрепленным в нем цилиндром равен:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{(J_P + J_{\text{ц}}) / D}. \quad (7)$$

Совместное решение уравнений (6) и (7) дает следующие выражения:

$$D = \frac{4\pi^2}{T_2^2 - T_1^2} \cdot J_{\text{ц}} \quad (8)$$

$$J_P = \frac{T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} \cdot J_{\text{ц}} \quad (9)$$

Проведение измерений

1. Измерить радиус цилиндра штангенциркулем не менее пяти раз. Определить среднее значение.
2. Взвесить цилиндр.
3. Рассчитать по формуле (5) момент инерции цилиндра относительно оси, совпадающей с осью аксиальной симметрии.
4. Определить период крутильных колебаний маятника в отсутствие груза по схеме, предложенной в предыдущем разделе.
5. Определить период колебаний маятника с закрепленным цилиндром. Для этого закрепить в рамке прибора цилиндр и определить период колебаний по той же схеме.
6. По формулам (8) и (9) рассчитать значения $J_{\text{ц}}$ и D .

Упражнение 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

1. Закрепить исследуемый параллелепипед в рамке прибора, чтобы ось вращения проходила через центр симметрии двух противоположных граней параллельно ребру a_1 .
2. Произвести измерения периода колебаний T_1 .
3. По формуле

$$T_1 = 2\pi\sqrt{(J_1 + J_P)/D} \quad (10)$$

произвести расчет главного момента инерции J_1 относительно этой свободной оси.

4. Аналогичным образом измерить моменты инерции J_2 и J_3 относительно двух других свободных осей, параллельных ребрам a_2 и a_3 , соответственно.

Упражнение 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДИАГОНАЛЬ

1. Закрепить параллелепипед в рамке прибора так, чтобы ось вращения совпадала с его диагональю.
2. Произвести измерения периода колебаний T_2 .
3. По формуле (10) произвести расчет момента инерции J_x .
4. Измерить штангенциркулем размеры ребер параллелепипеда.
5. Рассчитать косинусы углов, которые составляет диагональ параллелепипеда с его свободными осями [см. рис. 1 и (4)].
6. По формуле (4) рассчитать J_x .
7. Сопоставить экспериментальные и теоретические значения J_x .

Определить погрешности измерений и записать ответы с их учетом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов Д.В. «Механика»,
изд. Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова 1998,
глава IV – Движение абсолютно твердого тела,
§ 19 Вращательное движение тела вокруг оси.

2. Савельев И.В. Курс физики. т.I. М. Наука, 1989. §§ 31, 32.
3. Савельев И. В. «Курс общей физики» в 5-и книгах.
Книга I «Механика», 1998 г.,
гл. 5, Механика твердого тела,
§ 5.3 Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси,
§ 5.4 Момент инерции,
§ 5.4 Понятие о тензоре инерции.
Приложение. Эллипсоид инерции.